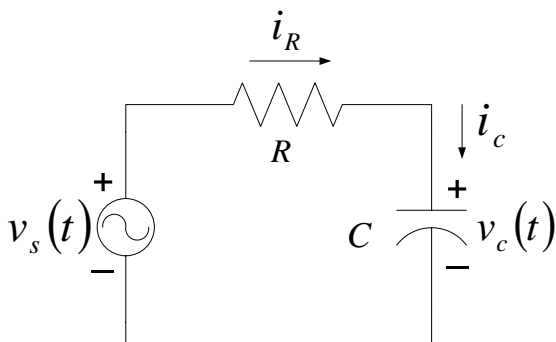


교류 회로망 해석

Jee-Hwan Ryu

School of Mechanical Engineering
Korea University of Technology and Education

동적 회로를 포함하는 회로의 해



$$i_R(t) = \frac{v_s(t) - v_C(t)}{R} = i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

$$-v_s(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$-v_s(t) + R i_C(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = 0$$

$$\frac{di_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i_C(t) = \frac{1}{R} \frac{dv_s(t)}{dt}$$

정현파 신호에 의해 작동되는 forced response

$$v_s(t) = V \cos \omega t$$

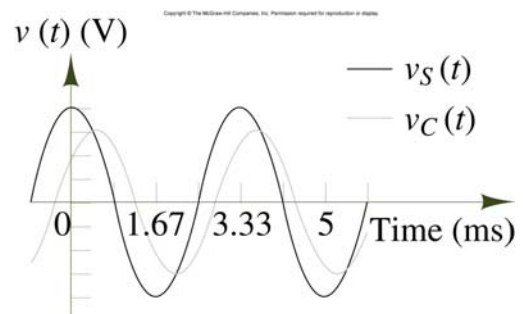
$$\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{RC} v_c = \frac{1}{RC} V \cos \omega t$$

$$\text{let's } v_c(t) = C \cos(\omega t + \phi) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t + \frac{1}{RC} (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

$$= \frac{1}{RC} V \cos \omega t$$

$$v_c(t) = \frac{V \omega RC}{1 + \omega^2 (RC)^2} \sin \omega t + \frac{V}{1 + \omega^2 (RC)^2} \cos \omega t$$



Korea University of Technology and Education

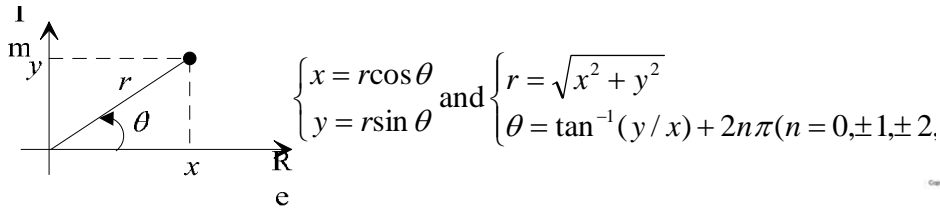
정현파 신호에 의해 작동되는 forced response

- 정현파 소스에 의해서 여진되는 회로(sinusoidally excited circuit) → 교류 회로(AC circuit)
- 정현파 소스에 의해서 여진되는 선형 회로(sinusoidally excited linear circuit)의 특징
 - 분기 전압 및 분기 전류의 주파수: **소스와 동일**
 - 분기 전압과 분기 전류의 진폭 및 위상: 일반적으로 소스와 다름
- 정현파 소스에 의해서 여진되는 회로에 대한 응답의 계산
 - 방법 1: 미분 방정식을 수립한 다음, 해를 구한다.
 - 방법 2: 페이저와 임피던스의 사용 (← 미분 방정식에 의존하지 않는다.)

Korea University of Technology and Education

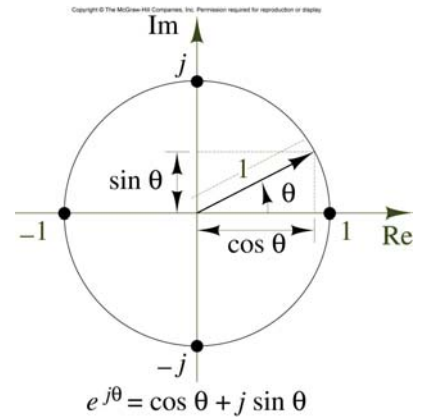
복소수

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$



오일러 항등식(Euler's identity)

$$\rightarrow e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad |e^{j\theta}| = |\cos \theta + j \sin \theta| = 1$$



Korea University of Technology and Education

복소 페이저(phasor)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Re}[Ae^{j\phi} e^{j\omega t}]$$

페이저: $\mathbf{X}(\omega) = Ae^{j\phi} (= A \cos \phi + j A \sin \phi) = A \angle \phi$

진폭 (또는 크기) $\rightarrow A = |\mathbf{X}(\omega)|$

위상 $\rightarrow \phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(\mathbf{X}(\omega))}{\text{Re}(\mathbf{X}(\omega))} \right\} + 2n\pi (n = 0, \pm 1, \dots)$

보통, ϕ 는 $-\pi < \phi \leq \pi$ 의 범위로 제한된다.

정현파 신호의 표현

시간 영역 형태(time-domain form): $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

주파수 영역 형태(frequency-domain form): $\mathbf{X}(\omega) = Ae^{j\phi}$

Korea University of Technology and Education

페이지를 이용한 두개의 정현파 소스의 합

$$V_1 = A \cos(\omega t + \phi_1)$$

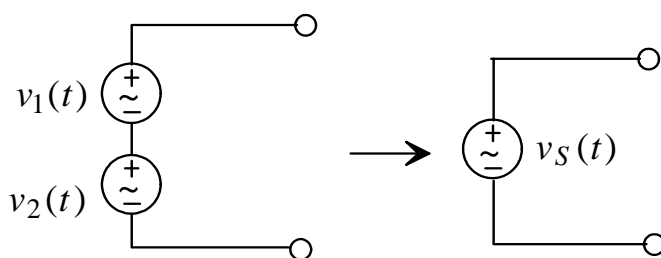
$$V_2 = B \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$V_1 = \text{Re}[Ae^{j\omega t} e^{j\phi_1}], \quad V_2 = \text{Re}[Be^{j\omega t} e^{j\phi_2}]$$

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \text{Re}[Ae^{j\omega t} e^{j\phi_1} + Be^{j\omega t} e^{j\phi_2}] \\ &= \text{Re}[(Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re}[Ce^{j\phi_3} e^{j\omega t}] \\ &= C \cos(\omega t + \phi_3) \end{aligned}$$

Korea University of Technology and Education

페이지를 이용한 두개의 정현파 소스의 합



$$\begin{cases} v_1(t) = 15\cos(377t + \frac{\pi}{4}) \\ v_2(t) = 20\cos(377t + \frac{\pi}{12}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{V}_1(\omega) = 15e^{j45^\circ} = 10.61 + j10.61 \\ \mathbf{V}_2(\omega) = 20e^{j15^\circ} = 19.32 + j5.18 \end{cases}$$

$$\mathbf{V}_s(\omega) = \mathbf{V}_1(\omega) + \mathbf{V}_2(\omega) = 29.93 + j15.79 = 33.84e^{j27.8^\circ}$$

$$v_s(t) = 33.84\cos(377t + 27.8^\circ)$$

Korea University of Technology and Education

Example

$$v_1 = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad v_2 = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt{10} \cos(\omega t + 1.248)$$

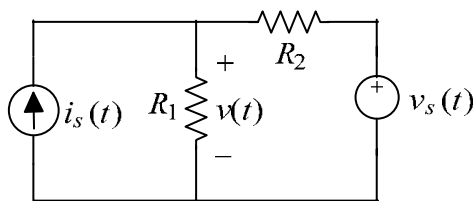
$$v_1 = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad v_2 = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_2 = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Korea University of Technology and Education

다른 주파수를 갖는 정현파 소스들의 중첩

- 소스를 분리하여 개별적으로 회로 해석을 수행하여야 한다.



$$\begin{cases} i_s(t) = 0.5\cos(2\pi \times 100t) \Rightarrow \mathbf{I}_S(\omega_1) = 0.5e^{j0^\circ} \quad (\omega_1 = 2\pi \times 100) \\ v_s(t) = 20\cos(2\pi \times 1000t) \Rightarrow \mathbf{V}_S(\omega_2) = 20e^{j0^\circ} \quad (\omega_2 = 2\pi \times 1000) \end{cases}$$

$$R_1 = 150\Omega, R_2 = 50\Omega$$

$$v_s(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_{i_s}(\omega_1) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 \mathbf{I}_S(\omega_1) = \frac{50 \times 150}{150 + 50} \times 0.5e^{j0^\circ} = 18.75e^{j0^\circ}$$

$$i_s(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_{v_s}(\omega_2) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathbf{V}_S(\omega_2) = \frac{150}{150 + 50} \times 20e^{j0^\circ} = 15e^{j0^\circ}$$

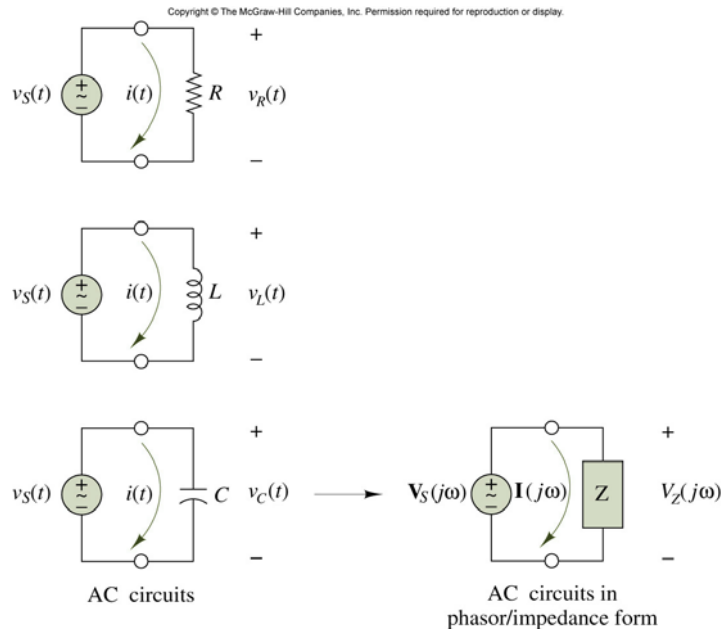
$$\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{V}_{i_s}(\omega_1) + \mathbf{V}_{v_s}(\omega_2) \Rightarrow v(t) = 18.75\cos(2\pi \times 100t) + 15.0\cos(2\pi \times 1000t)$$

$$\mathbf{V} \neq 18.75e^{j0^\circ} + 15.0e^{j0^\circ} = 33.75e^{j0^\circ}$$

Korea University of Technology and Education

임피던스 (Impedance)

- 주파수에 의존하는 저항 (frequency-dependant resistance)으로 주파수에 따라서 저항 값이 달라진다.



Korea University of Technology and Education

저항의 임피던스

$$v(t) = Ri(t) \Rightarrow V(s) = RI(s) \Rightarrow \underline{Z_R(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R}$$

$$v(t) = V \cos \omega t \Rightarrow \mathbf{V}(\omega) = V e^{j0^\circ}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \cos \omega t \Rightarrow \mathbf{I}(\omega) = \frac{V}{R} e^{j0^\circ}$$

$$\underline{Z_R(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = R}$$

Korea University of Technology and Education

인덕터의 임피던스

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow V_L(s) = LsI_L(s) \Rightarrow Z_L(s) \stackrel{\text{Let } V_L(s)}{=} \frac{V_L(s)}{I_L(s)} = Ls$$

$$v_L(t) = V_L \cos \omega t \Rightarrow \mathbf{V}_L(\omega) = V_L e^{j0^\circ}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt = \frac{V_L}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_L}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \mathbf{I}_L(\omega) = \frac{V_L}{\omega L} e^{-j90^\circ}$$

$$Z_L(\omega) \stackrel{\text{Let } \mathbf{V}_L(\omega)}{=} \frac{\mathbf{V}_L(\omega)}{\mathbf{I}_L(\omega)} = \omega L e^{j90^\circ} = j\omega L$$

- 저주파수 영역에서는 단락 회로처럼 동작한다.
- 고주파수 영역에서는 개방 회로처럼 동작한다.

단위: Ω

Korea University of Technology and Education

커패시터의 임피던스

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow I_C(s) = CsV_C(s) \Rightarrow Z_C(s) \stackrel{\text{Let } V_C(s)}{=} \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{Cs}$$

$$v_C(t) = V_C \cos \omega t \Rightarrow \mathbf{V}_C(\omega) = V_C e^{j0^\circ}$$

$$i_C(t) = -CV_C \omega \sin \omega t = \omega CV_C \cos(\omega t + 90^\circ) \Rightarrow \mathbf{I}_C(\omega) = \omega CV_C e^{j90^\circ}$$

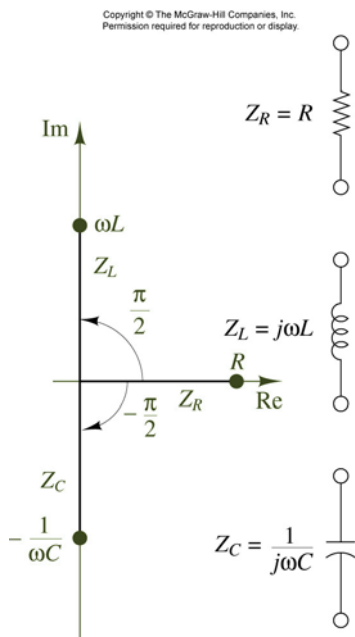
$$Z_C(\omega) \stackrel{\text{Let } \mathbf{V}_C(\omega)}{=} \frac{\mathbf{V}_C(\omega)}{\mathbf{I}_C(\omega)} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

- 저주파수 영역에서는 개방 회로처럼 동작한다.
- 고주파수 영역에서는 단락 회로처럼 동작한다.

단위: Ω

Korea University of Technology and Education

복소 평면에서의 임피던스



임피던스의 일반 형태:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$R(\omega)$: 저항 & $X(\omega)$: 리액턴스(reactance)

리액턴스는 커패시터의 임피던스와 인덕터의 임피던스를 총칭하는 용어이다.

커패시터와 인덕터를 임피던스로 표현하면, 이들 소자도 저항처럼 취급하여 저항 회로에 적용되었던 모든 법칙이나 개념(예를 들어, 옴의 법칙, 직렬, 병렬 연결, 테브닌 등가)을 적용시킬 수 있게 된다.

Korea University of Technology and Education

캐패시터와 저항의 병렬연결시 임피던스

- $C=0.001 \text{ uF}$, $R=1\text{Mohm}$, $\omega=377\text{rad/s}$ 일때

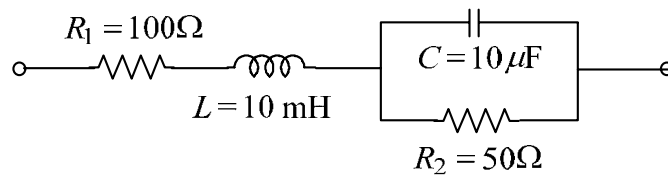
$$\begin{aligned} Z &= R \parallel 1/j\omega C = R \cdot (1/j\omega C) / (R + 1/j\omega C) \\ &= R / (1 + j\omega CR) \end{aligned}$$

$$Z(\omega=377) = 9.3571 \cdot 10^5 \cdot e^{-0.3605j}$$

Korea University of Technology and Education

Example

- $\omega = 10,000 \text{ rad/s}$ 에서 Z_{eq} 를 구하여라



$$Z_{R_1} = 100\Omega \text{ \& } Z_{R_2} = 50\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j10000 \times 10 \times 10^{-3} = j100(\Omega)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{10000 \times 10 \times 10^{-6}} = -j10(\Omega)$$

$$Z_{eq} = Z_{R_1} + Z_L + (Z_{R_2} \parallel Z_C) = 100 + j100 + \frac{50 \times (-j10)}{50 - j10} = 100 + j100 + (1.92 - j9.62) = 101.92 - j9.38$$

어드미턴스 (Admittance)

- 임피던스의 역수

$$Y(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

$G(\omega)$: conductance & $B(\omega)$: susceptance

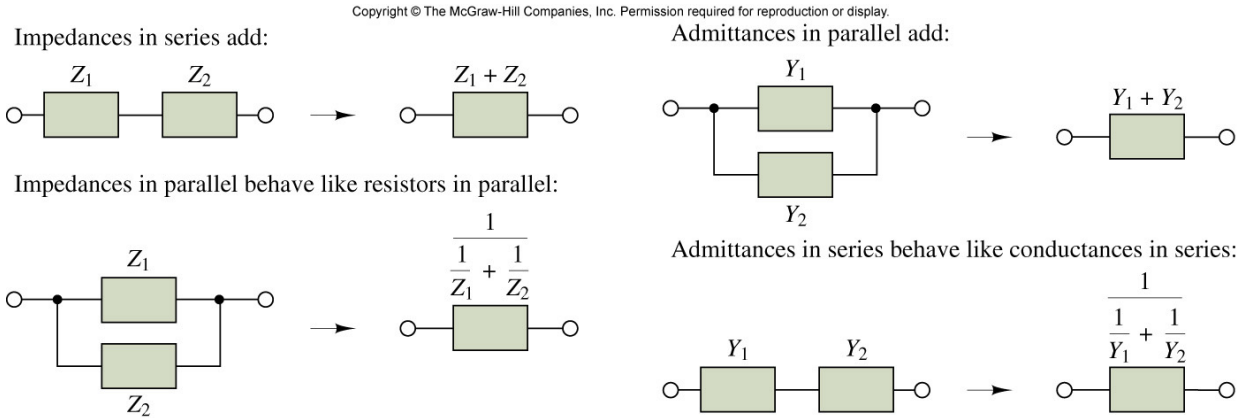
$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)}$$

임피던스와 어드미턴스 간의 관계

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \Rightarrow G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ \& } B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

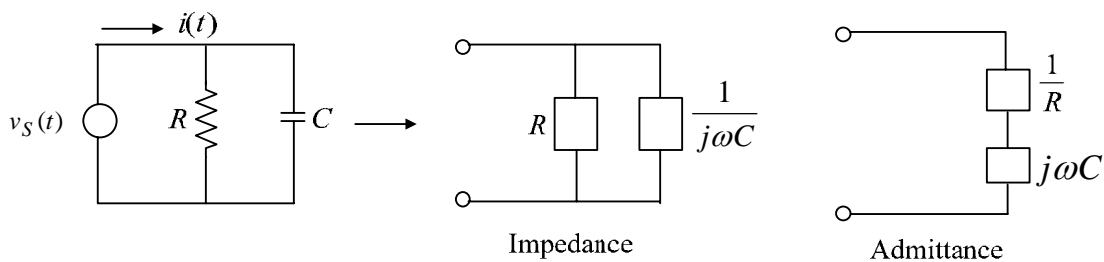
교류 등가회로

- 임피던스 <-> 저항
- 어드미턴스 <-> 컨덕턴스



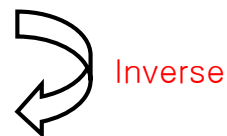
Korea University of Technology and Education

Example



임피던스:
$$Z(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{1/j\omega C} \right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

어드미턴스:
$$Y(\omega) = \frac{\mathbf{I}(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

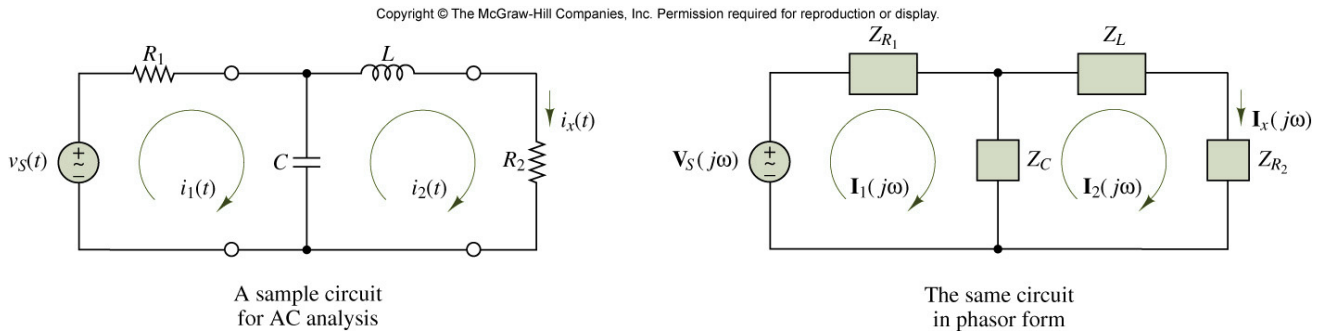


$$Z(\omega) = 1/Y(\omega)$$

Korea University of Technology and Education

교류회로 해석 방법

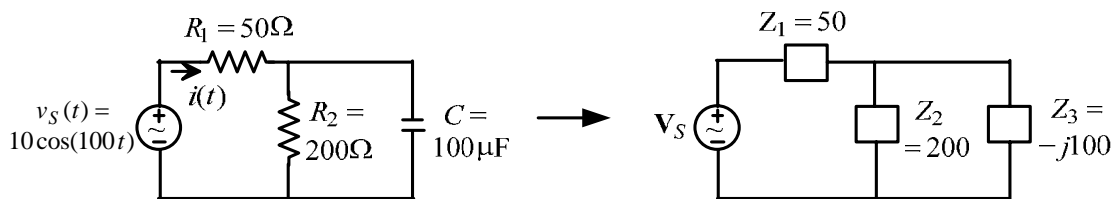
- 정현파 소스를 페이지로, 각 회로 소자를 임피던스로 표시한다.
- 저항 직류 회로에서 사용하였던 회로 해석 방식을 적용하여 페이지 형태의 해를 구한다.
 - KVL/KCL, 노드 전압 방법/망전류 방법, 테브닌/노턴 등가 회로
- 페이지 형태로 표시된 해를 시간 형태의 해로 변환한다.



Korea University of Technology and Education

Example

- $\omega = 100 \text{ rad/sec}$ 일 때 $i(t)$ 를 구하여라



$$\omega = 100 \text{ rad/sec}, \mathbf{V}_S(\omega) = 10e^{j0^\circ} \text{ (V)}, Z_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 100 \times 100 \times 10^{-6}} = -j100(\Omega)$$

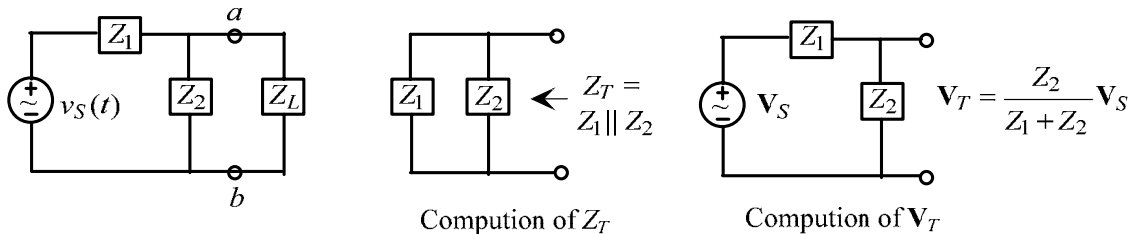
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 50 + \frac{200 \times (-j100)}{200 - j100} = 90 - j80$$

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_S(\omega)}{Z_{eq}} = \frac{10e^{j0^\circ}}{90 - j80} = 0.0833e^{j41.6^\circ} \longrightarrow i(t) = 0.0833\cos(100t + 41.6^\circ)$$

Korea University of Technology and Education

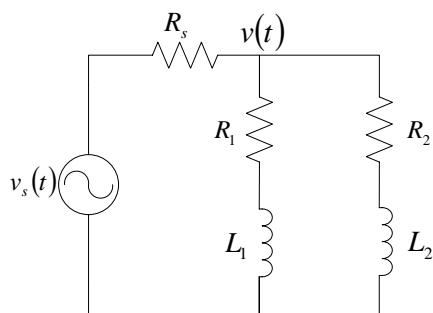
터브닌 및 노턴 등가회로

- 저항으로만 구성된 직류 회로에서 등가 저항을 구하는 방식과 동일하게 교류 회로의 등가 임피던스를 구할 수 있다



Korea University of Technology and Education

노드 전압법에 의한 교류회로의 해



$$R_s = 0.5\Omega; R_1 = 2\Omega; R_2 = 0.2\Omega; L_1 = 0.1H; L_2 = 20mH$$

$$v_s(t) = 155 \cos(377t)$$

$$Z_s = 0.5\Omega$$

$$Z_1 = 2 + j37.7$$

$$Z_2 = 0.2 + j7.54$$

$$\frac{V_s - V}{Z_s} - \frac{V}{Z_1} - \frac{V}{Z_2} = 0$$

$$\frac{V_s}{Z_s} = V \left(\frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)$$

$$V = \left(\frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} \frac{V_s}{Z_s}$$

$$= 154.1 \angle 0.079 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{154.1 \angle 0.079}{2 + j37.7} = 4.083 \angle -1.439$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{154.1 \angle 0.079}{0.2 + j7.54} = 20.44 \angle -1.465$$

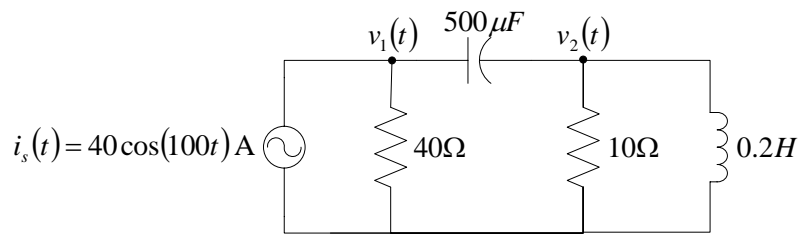
$$i_1(t) = 4.083 \cos(377t - 1.439) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 20.44 \cos(377t - 1.465) \text{ A}$$

Korea University of Technology and Education

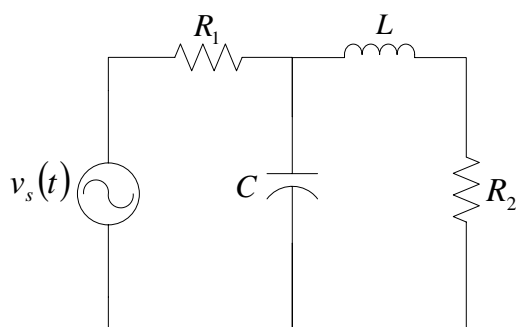
Example

- 노드전압 방법을 이용하여 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 결정



Korea University of Technology and Education

망 해석에 의한 AC회로의 해



$$\begin{aligned} V_s(j\omega) - Z_{R1}I_1(j\omega) - Z_C(I_1(j\omega) - I_2(j\omega)) &= 0 \\ -Z_C(I_2(j\omega) - I_1(j\omega)) - Z_L I_2(j\omega) - Z_{R2}I_2(j\omega) &= 0 \end{aligned}$$

Korea University of Technology and Education

Example

- 망해석 이용 $i_1(t)$, $i_2(t)$ 결정
- $V_s=15\cos(1500t)$, $R_1=75$ ohm, $R_2=100$ ohm
- $C=1$ uF, $L=0.5$ H

